Кравцов Г.А.,

Некоторые вопросы теории чисел.

1. Гипотеза о рекуррентной формуле простых чисел

Гипотеза: *Каждое простое число, большее 3, можно представить в виде рекуррентной зависимости вида* $p_i = p_{i-1} + 3^{k_i} + 2^{m_i} + n_i$, *где:*

p_i, p_{i-1} *- следующие друг за другом простые числа;*

$k_i \in [0, \infty)$ *- 0 и все натуральные числа;*

$m_i \in [0, \infty)$ *- 0 и все натуральные числа;*

n_i *- принимает нечетные значения 0, 1, 3, 5, 7 и далее.*

Назовем k_i, m_i, n_i - переменными шага простых чисел.

Очевидно, что если $k_i = m_i = n_i = 0$, то $p_i = p_{i-1} + 2$.

Примеры разложения простых чисел:

	Простые числа										
	3067(p_{i-1} **)**	**3079 (** p_i **)**	**3083**	**3089**	**3109**	**3119**	**3121**	**3137**	**3163**	**3167**	**3169**
k_i	2 (k_i)	1	1	2	2	0	2	2	1	0	2
m_i	1 (m_i)	0	1	3	0	0	2	4	0	0	2
n_i	1 (n_i)	0	1	3	0	0	3	1	0	0	2

	Простые числа										
	4663(p_{i-1} **)**	**4673 (** p_i **)**	**4679**	**4691**	**4703**	**4721**	**4723**	**4729**	**4733**	**4751**	**4759**
k_i	2 (k_i)	1	2	2	2	0	1	1	2	1	2
m_i	0 (m_i)	1	1	1	3	0	1	0	3	2	3
n_i	0 (n_i)	1	1	1	1	0	1	0	1	1	7

	Простые числа										
	9319(p_{i-1} **)**	**9323 (** p_i **)**	**9337**	**9341**	**9343**	**9349**	**9371**	**9377**	**9391**	**9397**	**9403**
k_i	1 (k_i)	2	1	0	1	2	1	2	1	1	2
m_i	0 (m_i)	2	0	0	1	3	1	2	1	1	0
n_i	0 (n_i)	1	0	0	1	5	1	1	1	1	0

Очевидно, что для доказательства применимости рекуррентной формулы достаточно показать, что любое четное число можно разложить по формуле $3^{k_i}+2^{m_i}+n_i$.

Исследуем значения выражения $3^{k_i}+2^{m_i}+n_i$ при минимальных значениях переменных шага простого числа:

Если $k_i=m_i=n_i=0$, то $3^{k_i}+2^{m_i}+n_i=2$.

Если $k_i=0, m_i>0$, то n_i - нечетное, большее нуля;

Если $k_i>0, m_i=0$, то $n_i=0$.

Докажем, что любое четное число можно разложить по формуле $3^{k_i}+2^{m_i}+n_i$, достаточно показать, что любое четное число $a:(3^k+1)\le a\le(3^{k+1}+1)$ можно разложить по формуле $3^{k_i}+2^{m_i}+n_i$.

Очевидно, что $2^{m_i}+n_i-1$ должно удовлетворять условию $0\le 2^{m_i}+n_i-1\le(3^{k+1}+1)-(3^k+1)$ или, если упростить правую часть неравенства, $0\le 2^{m_i}+n_i-1\le 2\cdot(3^k)$. Что и требовалось доказать.

2.Формула ППЧ.

Возьмем сумму двух простых чисел, которые следуют одно за другим:

$p_{i+2}+p_{i+1}=(p_{i+1}+3^{k_{i+2}}+2^{m_{i+2}}+n_{i+2})+(p_i+3^{k_{i+1}}+2^{m_{i+1}}+n_{i+1})$.

Преобразуем полученную сумму в разность:

$p_{i+2}-p_i=3^{k_{i+2}}+2^{m_{i+2}}+n_{i+2}+3^{k_{i+1}}+2^{m_{i+1}}+n_{i+1}$.

Возьмем сумму двух простых чисел, которые следуют через одно простое число:

$p_{i+3}+p_{i+1}=(p_{i+2}+3^{k_{i+3}}+2^{m_{i+3}}+n_{i+3})+(p_i+3^{k_{i+1}}+2^{m_{i+1}}+n_{i+1})$,

Разложим $p_{i+2}=(p_{i+1}+3^{k_{i+2}}+2^{m_{i+2}}+n_{i+2})$, подставим в выражение и получим:

$p_{i+3}+p_{i+1}=((p_{i+1}+3^{k_{i+2}}+2^{m_{i+2}}+n_{i+2})+3^{k_{i+3}}+2^{m_{i+3}}+n_{i+3})+(p_i+3^{k_{i+1}}+2^{m_{i+1}}+n_{i+1})$

Преобразуем полученную сумму в разность:

$p_{i+3}-p_i=(3^{k_{i+3}}+2^{m_{i+3}}+n_{i+3})+(3^{k_{i+2}}+2^{m_{i+2}}+n_{i+2})+(3^{k_{i+1}}+2^{m_{i+1}}+n_{i+1})$.

По аналогии получим:

$$p_{i+g}-p_i=\sum_{j=1}^{g}(3^{k_{i+j}}+2^{m_{i+j}}+n_{i+j}). \qquad (1)$$

Полученную формулу (1) назовем ***формулой произвольного простого числа (формула ППЧ)***.

3.Сильная и слабая гипотезы Гольдбаха.

В 1742 году прусский математик Кристиан Гольдбах послал письмо Леонарду Эйлеру, в котором он высказал следующее предположение: «Каждое нечётное число большее 5 можно представить в виде суммы трёх простых чисел.»

Эйлер заинтересовался проблемой и выдвинул более сильную гипотезу: «Каждое чётное число большее двух можно представить в виде суммы двух простых чисел.»

Первое утверждение называется слабой проблемой Гольдбаха, второе — сильной проблемой Гольдбаха (или проблемой Гольдбаха в формулировке Эйлера).

Из справедливости утверждения сильной проблемы Гольдбаха автоматически следует справедливость слабой проблемы Гольдбаха: если каждое чётное число > 4 есть сумма двух простых чисел, то, добавляя 3 к каждому чётному числу, можно получить все нечётные числа > 7.

Слабая проблема Гольдбаха формулируется так: «Каждое нечётное число больше 7 можно представить в виде суммы трёх нечётных простых.»

Эквивалентная формулировка: «Каждое нечётное число больше 5 можно представить в виде суммы трёх простых. (Каждое простое число может встречаться больше одного раза).»

Утверждение этой проблемы пока не доказано, хотя проведено много полезных попыток. В 1923 году математики Харди и Литлвуд показали, что в случае справедливости некоторого обобщения гипотезы Римана, проблема Гольдбаха верна для всех достаточно больших нечётных чисел.

В 1937 году, Виноградов представил доказательство, не зависящее от справедливости гипотезы Римана, т. е. доказал, что любое достаточно большое нечётное число может быть представлено в виде суммы трёх простых. Сам Виноградов не дал явной оценки для этого «достаточно большого числа», но его студент К. Бородин доказал, что оно не превышает $3^{3^{15}}$. Это число содержит 6 миллионов цифр, что делает невозможным прямую проверку всех меньших чисел. В дальнейшем этот результат многократно улучшали, пока в 1989 году Ванг и Чен не опустили нижнюю грань до $e^{e^{11503}} \approx 3.33 \times 10^{43000}$, что, тем не менее, по-прежнему вне пределов явной проверки меньших чисел.

В 1997 году Deshouillers, Effinger, Te Riele и Зиновьев показали, что обобщённая гипотеза Римана влечёт справедливость слабой проблемы Гольдаха. Они доказали её справедливость для чисел превышающих 10^{20}, справедливость утверждения для меньших чисел легко проверить на компьютере.

Сильная проблема Гольдбаха формулируется так: «Любое чётное число больше двух можно представить в виде суммы двух простых чисел.»

Виноградов в 1937 и Теодор Эстерманн в 1938 г. показали, что почти все чётные числа представимы в виде суммы двух простых чисел (доля непредставимых, если они есть, стремится к нулю). Этот результат немного усилен в 1975 Хьюгом Монтгомери (Hugh Montgomery) и Робертом Чарльзом Воганом (Robert Charles Vaughan). Они показали, что существуют положительные константы c и C, такие что количество чётных чисел, не больших N, непредставимых в виде суммы двух простых чисел, не превышает CN^{1-c}.

В 1939, Л. Г. Шнирельманн (L. G. Schnirelmann) доказал, что любое чётное число представимо в виде суммы не более 300 000 простых чисел. Этот результат многократно улучшался. В 1995 Ремер (Ramaré) доказал, что любое чётное число — сумма не более 7 простых чисел.

В 1966 Чен Жингран (Chen Jingrun) доказал, что любое достаточно большое чётное число представимо или в виде суммы двух простых чисел, или же в виде суммы простого числа и полупростого (произведения двух простых чисел). Например, $100 = 23 + 7 \times 11$.

На март 2004 года, сильная гипотеза Гольдбаха проверена для всех чётных чисел, не превышающих 2×10^{17}.

Докажем гипотезу Гольдбаха:

Возьмем сумму двух произвольных простых чисел, больших простого числа p_i ($p_{i+f} \geq p_{i+g} \succ p_i$), выраженную через формулу ППЧ:

$$p_{i+g} + p_{i+f} = \sum_{j=1}^{g}(3^{k_{i+j}} + 2^{m_{i+j}} + n_{i+j}) + \sum_{j=1}^{f}(3^{k_{i+j}} + 2^{m_{i+j}} + n_{i+j}) + 2 \cdot p_i .$$

Очевидно, что результат выражения при любых переменных шага простого числа $\sum_{j=1}^{g}(3^{k_{i+j}} + 2^{m_{i+j}} + n_{i+j}) + \sum_{j=1}^{f}(3^{k_{i+j}} + 2^{m_{i+j}} + n_{i+j})$ является четным числом. Следовательно, если удастся показать, что любое четное число раскладывается на сумму двух четных чисел, одно из которых получено умножением простого числа на 2, то удастся доказать гипотезу Гольдбаха.

Очевидно, что любое четное число большее 8 может быть разложено по формуле $CH = 2 \cdot 3 + H$, где H - четное число. Что и требовалось доказать.

Гипотеза: любое четное число может быть представлено как разность двух простых чисел.

Представим $p_{i+g}+p_{i+f}=\sum_{j=1}^{g}(3^{k_{i+j}}+2^{m_{i+j}}+n_{i+j})+\sum_{j=1}^{f}(3^{k_{i+j}}+2^{m_{i+j}}+n_{i+j})+2\cdot p_i$ в виде:

$p_{i+g}+p_{i+f}=2\cdot\sum_{j=1}^{g}(3^{k_{i+j}}+2^{m_{i+j}}+n_{i+j})+\sum_{j=g+1}^{f}(3^{k_{i+j}}+2^{m_{i+j}}+n_{i+j})+2\cdot p_i$, при условии, что $f\geq g$.

Так, как $p_{i+g}+p_{i+f}$ - четное число, то $\sum_{j=g+1}^{f}(3^{k_{i+j}}+2^{m_{i+j}}+n_{i+j})$ - тоже четное число. При этом $\sum_{j=g+1}^{f}(3^{k_{i+j}}+2^{m_{i+j}}+n_{i+j})=p_{i+f}-p_{i+g}$, где

$$2\cdot(f-g)\leq p_{i+f}-p_{i+g}\leq(3^{\max(k_i)}+2^{\max(m_i)}+\max(n_i))\cdot(f-g). \qquad (2)$$

Так как разница $(f-g)$ может быть любым натуральным числом (при условии $f\succ g$), то $p_{i+f}-p_{i+g}\geq 2\cdot(f-g)$ может принимать значения всех четных натуральных чисел. Что и требовалось доказать.

Библиография:

1.С.Коутинхо. Введение в теорию чисел. Алгоритм RSA. Москва: Постмаркет, 2001. - 328 с.